



**Distrito Universitario de Canarias**

## **SUBCOMISIÓN DE MATERIA “MATEMÁTICAS II”**

### **GUÍA**

**(Versión: Octubre 2006)**

#### **INTRODUCCIÓN, OBJETIVOS Y PROPUESTAS**

La presente guía es la propuesta de concreción elaborada por la subcomisión a partir del currículum para la materia de Matemáticas II de 2º curso de Bachillerato y sometida a consideración del profesorado. Se utilizará como referencia de trabajo para el curso 2006-2007. En ella se contemplan los contenidos mínimos de las explicaciones, dentro del marco señalado por la normativa vigente (BOC de 8 de mayo de 2002), adaptados también a la directriz nacional publicada en el BOE de 16 de Enero de 2001, así como las habilidades mínimas exigibles a los alumnos para superar tanto la asignatura como el ejercicio de la PAU.

Matemáticas II está concebida -oficialmente hablando- con dos objetivos fundamentales:

- a) Dar una introducción a las Matemáticas Superiores en sus aspectos operativos (cálculo práctico de derivadas, integrales, resolver sistemas, algo de geometría...).
- b) Iniciar al alumno en lo que podríamos llamar “el método matemático” y en las aplicaciones prácticas de las Matemáticas.

Las dificultades constatadas durante años por los asistentes a la Coordinación hacen que en la práctica el segundo objetivo no se cumpla, y que el primero se alcance escasamente y sólo a costa de reducciones sustanciales de nivel y recortes de contenidos.

Teniendo todo ello en cuenta, **se formulan los siguientes propósitos:**

- a) El primero, conseguir que **el programa sea explicado en su totalidad**, con independencia de la existencia o no de una prueba final. Sabemos que puede hacerse, siempre que el profesorado sea consciente del grado de profundidad que debe imprimir a la enseñanza de la asignatura.
- b) La **preparación de la PAU** –mientras exista- **puede hacerse en función de los niveles promedio de la enseñanza** en los diferentes centros, tal como ya está sucediendo actualmente.

## LA ASIGNATURA

Considerando Matemáticas II como introducción a las Matemáticas Superiores, dividimos la materia en cuatro grandes apartados, cuyo orden recomendado es éste:

- I. Funciones. Funciones continuas. Funciones derivables.
- II. Cálculo Diferencial e Integral.
- III. Introducción al Álgebra Lineal.
- IV. Introducción a la Geometría Vectorial.

Hay acuerdo en que las **Matemáticas I** deben de haber contemplado los siguientes puntos, y en que **hay que partir de esta base** (el trabajo necesario para ello habrá sido desarrollado por los Departamentos de los centros):

- a) Operaciones con diferentes clases de números (potencias, raíces, logaritmos...).
- b) Manipulación de expresiones algebraicas básicas (polinomios, expresiones racionales y algunas irracionales...)
- c) Ecuaciones e inecuaciones lineales y no lineales de primero y segundo grado en una variable (resolución y discusión).
- d) Derivadas: Concepto, Tasa de variación media y cálculo de derivadas sencillas.  
Interpretación geométrica y física de la derivada  
Recta tangente a una función
- e) Sistemas de ecuaciones con tres incógnitas: Resolución y aplicación a problemas

### **I. Funciones. Funciones continuas. Funciones derivables.**

1. Concepto de función. Funciones reales de variable natural y funciones reales de variable real. Repasar las características de las funciones a través de la representación. Repasar los siguientes tipos de funciones: Funciones polinómicas, racionales (con denominador de grado a lo más 2), logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, parte entera, valor absoluto y raíces cuadradas (con radicando fácilmente descomponible en factores), así como funciones definidas “a trozos” combinando las anteriores. Representar los casos  $f(x) \pm a$ ,  $f(x \pm a)$ ,  $af(x)$  y  $f(ax)$ , a partir de  $f(x)$ . Introducir los conceptos **con ayuda de muchas representaciones gráficas**.

2. Concepto intuitivo e interpretación gráfica del límite de una función con la variable tendiendo a un punto o con la variable tendiendo a infinito. Límites laterales. Cálculos de límites funcionales con indeterminaciones del tipo  $0/0$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \times \infty$ ,  $\infty/\infty$  y  $1^\infty$  con apoyo gráfico, calculadoras, construcción de tablas de valores y técnicas habituales. Definición y cálculo de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

3. Continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Tipos de discontinuidades: evitable, de salto y esencial.

4. Tasa de variación media de una función. Concepto de derivada de una función en un punto. Interpretaciones geométricas y físicas. Derivadas laterales. Rectas tangente y normal a una curva en un punto. Reconocer las propiedades de continuidad y derivabilidad de una función a partir de su gráfica y mostrar gráficamente que “derivable en un punto implica continua en ese punto” y no al revés.

## II. Cálculo Diferencial e Integral.

5. Concepto de función derivada de otra función. Estudio de la derivabilidad de las funciones del Tema 1: Cálculos prácticos y utilización de algunas de las reglas usuales de derivación (suma, producto, cociente, función compuesta, con un máximo de dos composiciones.). Tabla de funciones derivadas. Comparar las gráficas de  $f(x)$  y de  $f'(x)$ .

### 6. Aplicaciones de la derivada.

6.1. Análisis de la construcción de una gráfica: aplicación de los conceptos de límite, continuidad y derivada a la representación gráfica y al estudio de situaciones susceptibles de ser tratadas mediante funciones

- Dominio y continuidad
- Estudio de las simetrías  $f(x) = f(-x)$  y  $f(-x) = -f(x)$ .
- Puntos de corte.
- Asíntotas: Horizontales, verticales y oblicuas.
- Monotonía (aplicación de la derivada primera) y extremos. Concepto de extremo relativo de una función. Condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de extremos en una función derivable.
- Curvatura (aplicación de la derivada segunda): Interpretación geométrica. Concavidad y convexidad. Puntos de Inflexión. Una función es convexa en  $a$  si  $f''(a) < 0$ , esto es, si la gráfica tiene aspecto de  $\cap$  en las proximidades del punto  $(a, f(a))$ .

6.2. Extracción de Información a partir de una gráfica:

- Extracción de información acerca de  $f(x)$ ,  $f'(x)$  y  $f''(x)$  por observación de la gráfica de  $f(x)$ .
- Extracción de información acerca de  $f$  por observación de la gráfica de  $f'(x)$ .
  - Puntos de corte de  $f'(x) \rightarrow$  Posibles extremos de  $f(x)$
  - Regiones de  $f'(x) \rightarrow$  Monotonía de  $f(x)$
  - Monotonía de  $f'(x) \rightarrow$  Curvatura de  $f(x)$

Tipo de función	Grado de dificultad exigible
Polinómica	De grado máximo 3 y 4 factorizados
Racional	Denominador de grado 2 como máximo.
Irracional	Puede aparecer $\sqrt{x+a}$ en cualquier combinación.
Trascendente	$ke^{ax+b}$ , $\ln(ax+b)$ .

Tabla 1. Tabla de funciones cuyas gráficas deben trabajarse.

6.3. Optimización. Se trabajará con problemas que generen funciones a optimizar sencillas.

7. Dada una derivada, hallar la función de la que procede. Concepto de primitiva: la constante de integración y su interpretación. Lectura y utilización de la tabla de derivadas en uno y otro sentido. Cálculo elemental de integrales indefinidas:

- Integrales Inmediatas.
- Integración por cambios de variables, sencillos y con un solo cambio de variable.
- Integración por partes, con no más de dos niveles de integración y evitando las integrales cíclicas.
- Integrales racionales, trigonométricas e irracionales de funciones explicitadas en la siguiente tabla.

Tipo de función	Grado de dificultad exigible
Polinómica	Grado n
Racional	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Comenzar por cociente de polinomios en los cuales haya que hacer la división correspondiente.</li> <li>- Denominador de grado 3 como máximo cuando se trata de raíces reales (es decir hasta con una raíz repetida en el denominador)</li> <li>- El caso simple de raíces complejas con denominador <math>a^2 + x^2</math> (Tipo <math>\arctg(x)</math>).</li> </ul>
Irracional	Puede aparecer $\sqrt{x+a}$ en cualquier combinación.
Trascendente	$ke^{ax+b}$ , $\ln(ax+b)$ .
Trigonométrica	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>k\sin(ax+b)</math>, <math>k\cos(ax+b)</math>,</li> <li>- Integrales trigonométricas que se resuelven porque pasan directamente a racionales: Los casos más simples (impar en seno y/o coseno).</li> </ul>
Mixta	$xf(x)$ y $x^2f(x)$ , siendo $f$ trascendente o trigonométrica (básicamente para práctica de ejercicios de integración por partes).

Tabla 2. Tabla de funciones cuyas integrales deben trabajarse

8. Concepto de integral definida de una función sobre un intervalo cerrado: origen geométrico del problema. Propiedades algorítmicas de la integral definida (división del intervalo, suma de funciones,...). Relación entre la integral definida y el cálculo de primitivas: Regla de Barrow. Cálculo práctico de áreas sobre los casos simples de funciones tratados anteriormente, limitadas por dos curvas como máximo. Ejercicios con funciones sencillas: parábolas, rectas y funciones exponenciales.

### III. Álgebra Lineal.

9. Concepto de matriz. Tipos de matrices. Operaciones con matrices y propiedades. Traspuesta de una matriz.

10. Concepto de determinante de una matriz cuadrada. Cálculo de determinantes, hasta orden  $4 \times 4$ . Propiedades de los determinantes, ilustradas con ejemplos y no demostradas. Regla de Sarrus. Cálculo de determinantes cuyos elementos sean no numéricos aplicando las propiedades. Concepto y cálculo de la matriz inversa. Adjunta de una matriz. Concepto y cálculo de rango o característica de una matriz.

11. Sistemas de ecuaciones lineales.

- Concepto de sistema y de solución. Operaciones elementales con las ecuaciones del sistema y concepto de sistemas equivalentes.
- Clasificación de los sistemas de ecuaciones en función de las soluciones: compatible, incompatible, determinado e indeterminado.
- Matriz de números asociada a un sistema. Escribir un sistema lineal de modo matricial.
- Ecuaciones y sistemas de ecuaciones cuyas incógnitas son matrices.
- Método de Gauss para sistemas  $3 \times 3$ .
- Método de Cramer para los casos  $2 \times 2$  y  $3 \times 3$ .
- Teorema de Rouché-Frobenius. Discusión de sistemas, homogéneos o no, con un máximo de tres ecuaciones, tres incógnitas y un parámetro.

☐ Se sugiere introducir y fijar los conceptos usando sistemas de  $2 \times 2$ . Repasar los métodos de resolución: Igualación, reducción y sustitución. Discutir el significado geométrico mediante posiciones relativas de rectas en el plano. Realizar ejercicios prácticos extendiendo dichos métodos de resolución a sistemas de  $3 \times 3$ , compatibles y determinados.

☐ Se recomienda trabajar ejercicios y cuestiones de sistemas de ecuaciones hasta orden  $4 \times 4$  ya que en el bloque de geometría se necesitará para resolver las posiciones relativas.

### IV. Geometría en el Espacio.

12. Espacio Afín.

12.1 Sistema de referencia afín: origen de coordenadas, base canónica, planos de coordenadas y coordenadas de un punto. Definición de vector asociado a un par de puntos. Coordenadas de un vector en la base canónica. Características de un vector: módulo, dirección y sentido. Operaciones con vectores: suma, resta y producto de un vector por un número. Propiedades e interpretación física y geométrica de estas operaciones. Dependencia e independencia lineal de vectores (por combinación lineal y por determinantes).

12.2 Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétrica, continua, implícita. Ecuaciones del plano: vectorial, paramétrica, implícita. Paralelismo: recta-recta, plano-plano, recta-plano. Intersección e incidencia: recta-punto, punto-plano, recta-recta, intersección de dos planos, intersección de tres planos, intersección de recta y plano.

### 13. Espacio Euclídeo.

13.1 Producto escalar. Interpretación geométrica. Base ortonormal. Producto vectorial. Interpretación geométrica.

13.2 Problemas lineales en el espacio euclídeo: vector normal al plano, obtención métrica del plano, vector director de la ecuación general de la recta, posición relativa recta-recta, plano-plano, recta-plano (a través de las caracterizaciones del vector normal del plano y los vectores directores de las rectas).

13.3 Problemas de distancias y ángulos: distancia entre dos puntos, distancia de un punto a una recta, distancia de un punto a un plano, distancia entre dos planos paralelos, distancia entre recta y plano, distancia entre dos rectas. Ángulo entre dos rectas, ángulo entre recta y plano, ángulo entre planos.

## V. Temporalización

La Subcomisión de Materia propone el siguiente calendario para el Curso 2006-2007. El objetivo fundamental es que **se puedan explicar los contenidos de Geometría en su integridad**. Se han tenido en cuenta posibles fiestas, “puentes”, evaluaciones, Carnavales, Semana Santa, exámenes y demás contratiempos.

Contenidos	Semanas	Fecha inicio	Fechas límite
Temas 1, 2, 3 y 4	6	18 septiembre 2006	27 octubre 2006
Temas 5 y 6	6	30 octubre 2006	15 diciembre 2006
Temas 7 y 8	6	18 diciembre 2006	9 febrero 2007
Temas 9, 10 y 11	5	12 febrero 2007	23 marzo 2007
Temas 12 y 13	6	26 marzo 2007	11 mayo 2007
Toda la Asignatura	29		PAU 13, 14 y 15 junio de 2007 17, 18 y 19 septiembre de 2007

Tabla 2: Temporalización 2006-2007 de “Matemáticas II”

## VI. Calendario de las reuniones de coordinación de Matemáticas II.

	Hora	CEP La Laguna	CEP Las Palmas II
<b>1ª reunión</b>	10:30	3 de octubre de 2006	2 de octubre de 2006
<b>2ª reunión</b>	10:30	11 de enero de 2007	19 de enero de 2007
<b>3ª reunión</b>	10:30	10 de abril de 2007	11 de abril de 2007
<b>Nota:</b> Queda pendiente de confirmar la posibilidad de intercambiar las fechas de la tercera reunión, de forma que se celebre en primer lugar en la Provincia de Las Palmas y luego en la Provincia de S/C de Tenerife, a fin de respetar la alternancia en el orden de las celebraciones.			

## VII. Información sobre la PAU Matemáticas II 2006-07

### Consultas a los miembros de la subcomisión de Matemáticas II

Víctor Almeida Lozano	ULL. Departamento de Análisis Matemático <a href="mailto:valmeida@ull.es">valmeida@ull.es</a> 922 319066
Lucía Henríquez Rodríguez	CEP de Telde. Asesoría de Secundaria/Ámbito Científico Tecnológico <a href="mailto:lhenrod@gobiernodecanarias.org">lhenrod@gobiernodecanarias.org</a> 928 131525 / 928 131505
Francisco David León Medina	CEP de Icod de los Vinos. Asesoría de Secundaria/Ámbito Científico Tecnológico. <a href="mailto:fleomed@gobiernodecanarias.org">fleomed@gobiernodecanarias.org</a> 922 813404
María del Pino Quintana Montesdeoca	ULPGC. Departamento de Matemáticas <a href="mailto:mpino@dma.ulpgc.es">mpino@dma.ulpgc.es</a> 928 458815

### Consultas sobre la PAU al Servicio de Ordenación de las Enseñanzas de la DGOIE

Aurelio Fernández García

[afergar@gobiernodecanarias.org](mailto:afergar@gobiernodecanarias.org)

Teléfono: 922 592593

Página Web de la PAU: <http://www.paucanarias.com>

Página Web de la Consejería: <http://www.educa.rcanaria.es>

↗ Recursos y Servicios (Coordinación PAU)

## VIII. Estructura de la prueba de Matemáticas II

Se entregará a cada alumno dos propuestas diferenciadas, Opción A y Opción B. El alumno tendrá que elegir una opción, sin que pueda mezclar ejercicios de una con ejercicios de la otra.

Cada opción constará de cuatro ejercicios: dos de Análisis, uno de Álgebra y uno de Geometría. Estos cuatro ejercicios se valorarán por igual.

Para la resolución de los ejercicios no será necesario utilizar calculadora; no obstante, se podrá hacer uso de ésta. Durante el examen no se permitirá el préstamo de calculadoras entre los estudiantes. En cualquier caso, todos los procesos que conduzcan a la obtención de resultados deben estar suficientemente razonados y explicitados. Asimismo, se valorará la presentación y el orden en el desarrollo de los ejercicios.

## IX. Información de interés

1. Se anima a los profesores-as de la materia a aportar materiales, actividades y problemas, que servirán de referencia para la elaboración de las pruebas. Dicho material estará a disposición, en la página Web de la PAU, para aquellas personas que lo deseen.
2. La Guía de Matemáticas I, elaborada por el grupo de trabajo, estará disponible este curso en la Web de la materia de Matemáticas II, en el apartado de *Otros Recursos*. Con ella se pretende orientar al profesorado de la asignatura de Matemáticas I, de modo que se puedan abordar los contenidos básicos requeridos en la materia de segundo, facilitando actividades, a través de fichas y herramientas informáticas, que permitan trabajar el resto de los contenidos en el tiempo no presencial del estudiante.  
Cualquier aportación o sugerencia que se haga será de sumo interés para la adaptación y actualización de esta Guía de Matemáticas I. Los correos electrónicos a los que se pueden enviar las posibles sugerencias y actividades son:

[mgonpov@gobiernodecanarias.org](mailto:mgonpov@gobiernodecanarias.org) (Auxi González)

[mpino@dma.ulpgc.es](mailto:mpino@dma.ulpgc.es) (M<sup>a</sup> Pino Quintana)